Лекция 9. Переходные процессы в линейных электрических цепях

При анализе электрических цепей существует два режима работы: *установившийся* (стационарный) и *переходный*.

Установившейся режим **-** цепь, подключенная к источнику тока с периодическим повторением мгновенных значений тока и напряжений в ветвях.

Переходный режим (процесс) – при включении, отключении внешнего источника или переключении внутри цепи. Переход от одного стационарного (установившегося) состояния к другому.

Любое изменение в цепи, приводящее к переходному процессу, условимся называть ***коммутацией***. Теоретически продолжительность коммутации равна нулю (Δt=0).

Эти процессы быстропротекающие (десятые и миллионные доли секунд), поэтому возникает вопрос – стоит ли их принимать во внимание. Стоит, особенно для цепей со значительной ***индуктивностью и емкостью***.

Их *изучение необходимо* для *расчета токов и напряжений, опасных для изоляции* электрических устройств. Изменение электрической энергии W в цепи при $t=0$ (скачком) должно равняться бесконечности:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{0} = \infty,$$

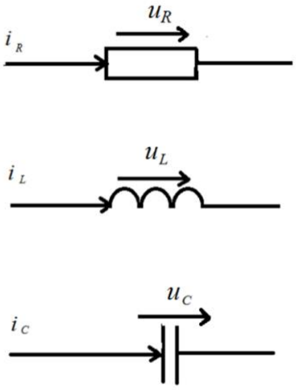
поэтому *надо уметь рассчитывать токи и напряжения переходных процессов для разработки мер защиты.*

Законы коммутации

Первый закон − *ток в цепи катушки с индуктивностью* не может меняться скачком при $t = 0$, и имеет то же значение ***после коммутации*** $[i_l(0_+)]$, что и ***до коммутации*** $[i_l(0_-)]$, так как энергия в индуктивности: $W_L = Li_L^2/2$ (*определяется током в катушке* индуктивности).

Второй закон − *напряжение на емкости* не может меняться скачком при $t = 0$ и имеет то же значение ***после коммутации*** $u_C(0_+)$,***что и до коммутации*** $u_C(0_-)$: $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, т.к. энергия на емкости: $W_C = Cu_C^2/2$ (*определяется напряжением на конденсаторе*).

При рассмотрении переходных процессов необходимо знать (рис. 140):



$$u_R = i_R R \Rightarrow i_R = \frac{u_R}{R}$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt \Rightarrow i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

Рис. 1.40. Зависимости токов и напряжений для активных, индуктивных и емкостных элементов цепи

Классический метод расчета переходных процессов

Переходный процесс описывается *неоднородными* дифференциальными уравнениями (в цепи есть источник ЭДС, правая часть уравнения $\neq 0$) или *однородными* (нет источника ЭДС, правая часть уравнения $= 0$).

Расчет переходных процессов *в линейных цепях классическим методом,* содержит следующие этапы:

1. Составляется дифференциальное уравнение для i или u (законы Кирхгофа).

2. Составляется общее решение из *дифференциального уравнения (п.1)* цепи (сумма ***частного решения*** *неоднородного дифференциального уравнения и* ***общего решения*** *однородного уравнения).*

Частным решением может быть *установившийся режим* (токи $i_у$ или напряжения $u_у$) цепи (если он существует).

Общее решение однородного *дифференциального уравнения* (цепь без источника ЭДС) − *свободный процесс* с током $i_{св}$ и напряжением $u_{св}$.

3. Находятся постоянные интегрирования для *общего решения* переходных токов и напряжений ($i = i_у + i_{св}$, $u = u_у + u_{св}$), которые определяют из *начальных условий* (*законы коммутации*).

Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним накопителем энергии (индуктивным (L) элементом)

Рассмотрим ***несколько примеров переходных процессов,*** при коммутации в цепи с ***источником постоянной ЭДС и индуктивным элементом*** (рис. 1.41)**.**

При замыкании ключа К($t = 0$) появится ток i и напряжение на резистивном $u_R = R \cdot i$ и индуктивном $u_L = L\, di/\, dt$ элементах катушки индуктивности.

1. Составим *неоднородное* (правая часть уравнения не равна нулю) *дифференциальное уравнение цепи*. Согласно второму закону Кирхгофа:

$$u_R + u_L = R \cdot i + L\frac{di}{dt} = E. \qquad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.11) справедливо для любого момента времени *после коммутации* (с момента $t = 0_+$), имеет вид:

$$i = i_y + i_{\text{св}}. \qquad (1.12)$$

Первая (установившаяся) составляющая уравнения (1.12) − *частное решение неоднородного дифференциального уравнения* (1.11), равна постоянному току в цепи после окончания переходного процесса (теоретически продолжается бесконечно):

$$i_y = \frac{E}{R}. \qquad (1.13)$$

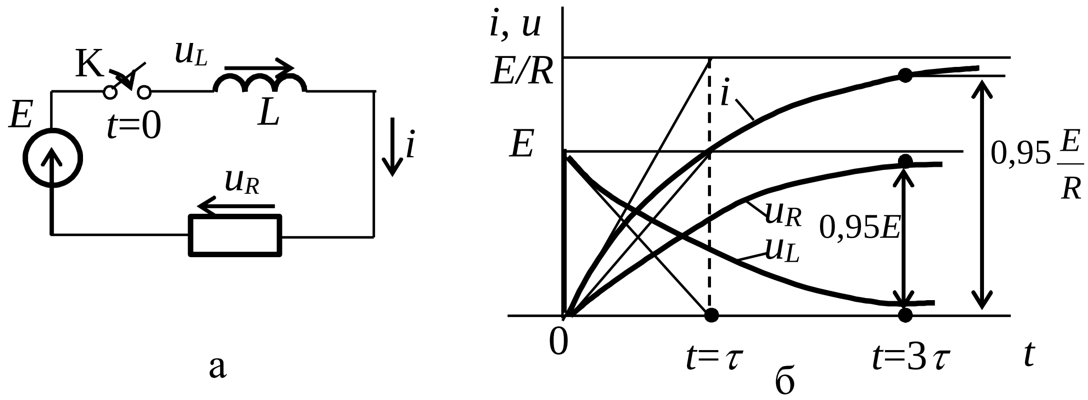


Рис. 1.41. Схема с активным и индуктивным сопротивлением (а), зависимости тока и напряжения от времени при включении R и L к источнику постоянного ЭДС (б)

Вторая составляющая в (1.12) – общего решения однородного дифференциального уравнения (правая часть его равна нулю) цепи, т.е.

$$L\frac{di_{\text{св}}}{dt} + Ri_{\text{св}} = 0,$$

и называется *свободным процессом с током*: $i_{\text{св}} = A \cdot \exp(pt)$, (1.14)

где $p = -R/L$ – корень характеристического уравнения $Lp + R = 0$.

2. Общее решение уравнения (1.12) с учетом (1.13) и (1.14) примет вид:

$$i = \frac{E}{R} + A \cdot \exp\left(-\frac{R}{L}t\right), \qquad (1.15)$$

где A − постоянная интегрирования. Определяется из *начальных условий для индуктивного* элемента *в момент замыкания ключа* (t=0). До коммутации (t=0₋) ток был равен нулю. Поэтому по 1 закону коммутации:

$$\text{при } t=0,\ \ i(0_-) = 0 = i(0_+) = \frac{E}{R} + A, \text{ откуда } A = -\frac{E}{R}.$$

Подставив A в (1.16), получим ***закон нарастания тока*** в цепи (рис. 1.41, б):

$$i = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \qquad (1.16)$$

где $\tau = L/\mathrm{R}$ - *постоянная времени* цепи по рис. 1.41, а.

Переходный процесс считаем закончившимся через интервал времени (3τ) с момента коммутации, когда ток достигнет значения $i(3\tau) = 0{,}95E/R$.

Зависимости напряжений от времени на R и L элементах (рис. 1.41, б) с учетом уравнения (1.16):

$$u_R = Ri = E[1 - \exp\,(-t/\tau)]; \qquad u_L = L\frac{di}{dt} = E\exp(-\,t/\tau).$$

Скорость изменения тока в цепи в интервале $0 \leq t < \tau$ можно считать постоянной и равной $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}$. Следовательно напряжение в этом интервале времени на резистивном элементе:

$$u_R \approx \frac{R}{L}Et = \frac{R}{L}\int_0^t E dt,$$

т.е. пропорционально интегралу ЭДС E. Такую ***цепь называют интегрирующей.***

Отключение цепи с катушкой индуктивности. ***В этом случае*** между размыкающимися контактами ***возникает дуговой разряд*** (наблюдается, в скользящих контактах электрического транспорта). Для его ликвидации параллельно ключу К включают резистор R_1 (рис. 1.42, а).

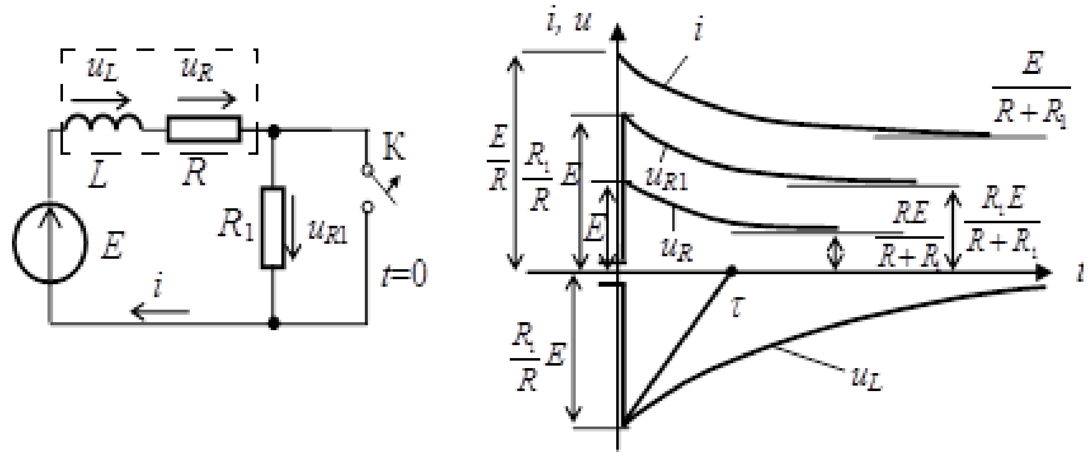
1. Составляем ***неоднородное дифференциальное уравнение цепи после размыкания ключа*** по второму закону Кирхгофа***:***

$$u_L + u_R + u_{R1} = \frac{Ldi}{dt} + \left(R + R_1\right)i = E \qquad (1.17)$$

2. ***Общее решение*** уравнения (1.17) такое же, как (1.15):

$$\boldsymbol{i = i_y + i_{св} = \frac{E}{R + R_1} + A \cdot \exp\left(-\frac{R + R_1}{L}t\right)}, \qquad (1.18)$$

где $i_y = E/(R + R_1)$ – установившаяся составляющая (постоянный ток в цепи после размыкания ключа).



а *б*

Рис. 1.42. Схема цепи с RLR_1 *при размыкании ключа* (а), зависимости тока и напряжения в этой цепи от времени (б)

Постоянная A в (1.18) определяется из начальных условий ***для индуктивного элемента***. ***До размыкания ключа*** (t=0), в катушке был постоянный ток E/R. Поэтому по 1-му закону коммутации:

при $t=0$ $i(0\_)=\dfrac{E}{R}=i\,(0_+)=\dfrac{E}{R+R_1}+A,$ откуда $A=\dfrac{E}{R}-\dfrac{E}{R+R_1}=\dfrac{R_1E}{R(R+R_1)}.$

Ток в цепи катушки индуктивности ***после размыкания ключа,*** с учетом A (рис.1.42, б):

$$i=\frac{E}{R+R_1}\left[\left(1+\frac{R_1}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\right], \tag{1.19}$$

где $\tau = L/(R + R_1)$ – постоянная времени цепи.

Зависимости напряжений от времени на R и L элементах катушки (рис. 1.42, б), с учетом уравнения 1.19:

$$u_R=Ri=\frac{RE}{R+R_1}\left[1+\frac{R_1}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right];\; u_{R1}=R_1i=\frac{R_1E}{R+R_1}\left[1+\frac{R_1}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right];$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=-\frac{R_1}{R}E\times\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

В первый момент времени ***после размыкания ключа*** (t=0_+) ***напряжение*** на R_1 *скачком возрастает* от нуля $u_R(0\_)=0$ до $u_R(0_+)=ER_1/R$ (рис. 2, б). Поэтому, при $R_1>R$ ***между контактами ключа появляется значительное напряжение,*** которое ***может вызвать дуговой разряд.*** Для его исключения желательно чтобы $R_1<R$.

Переходные процессы в цепи постоянного тока при зарядке и разрядке одного накопителя энергии (емкостной (*C*) элемент)[1]

Рассмотрим переходный процесс в цепи зарядки емкостного элемента от источника постоянной ЭДС E (рис. 1.43, а), через резисторR.

1. Неоднородное дифференциальное уравнение (второй закон Кирхгофа) *после замыкания ключа* К (в момент t=0):

$$u_R + u_C = Ri + u_C = \frac{RC \cdot du_C}{dt} + u_C = E. \tag{1.20}$$

*2.**Общее решение*** неоднородного уравнения (1.20) для напряжения на емкостном элементе: $u_C = u_{Cy} + u_{Cв}$.

Первая составляющая общего решения: $u_{Cy} = E,$ (1.21)

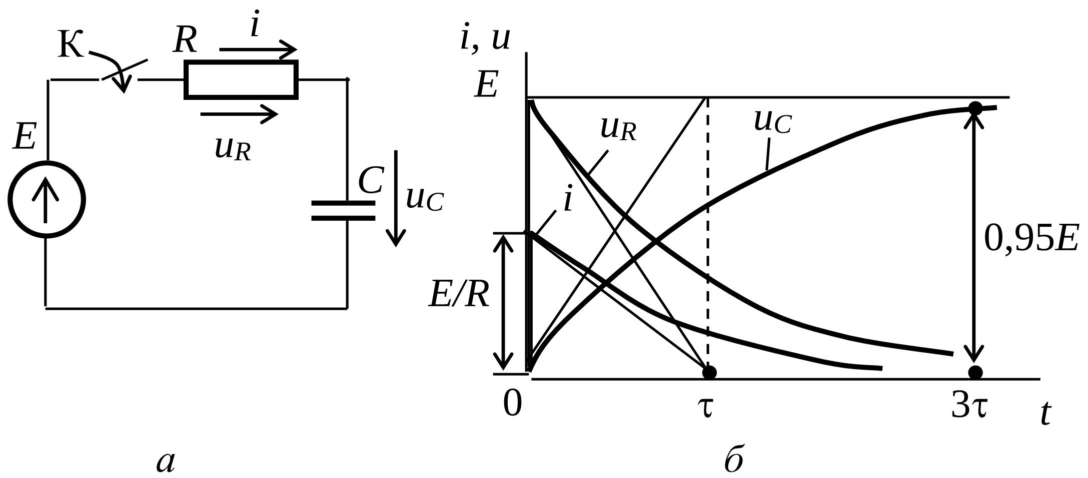


Рис. 1.43. Схема электрической *цепи зарядки конденсатора* (а), зависимости напряжения и тока при зарядке конденсатора (б)

Вторая составляющая соответствует *свободному процессу*, так как уравнение (1.20) первого порядка, то

$$u_{C_{св}} = A \cdot \exp\,(pt), \tag{1.22}$$

где $p = -1/RC$ – корень характеристического уравнения $RCp + 1 = 0.$

Общее решение с учетом (1.21, 1.22) примет вид:

$$u_C = E + A \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{1.23}$$

Для определения А используем 2-й *закон коммутации для емкостного элемента. Считаем, что до замыкания ключа* (т.е. в момент t=0_-) емкостной элемент не был заряжен, поэтому:

$$u_C(0\_\ ) = 0 = u_C(0_+) = E + A,$$

[1]Этот раздел лекции читается по усмотрению лектора

при t=0, откуда $A = -E$.

Напряжение ***на емкостном элементе во время зарядки***, с учетом A (рис. 1.43, б):

$$u_C = E\left[-\exp\left(-\frac{\tau}{t}\right)\right] \tag{1.24}$$

где $\tau = RC -$ *постоянная времени* цепи (скорость переходного процесса).

Зависимости от времени *зарядного тока и напряжения на резистивном элементе* (рис. 1.43, б):

$$i = \frac{Cdu_C}{dt} = \frac{E}{R}\times\exp\left(-\frac{\tau}{t}\right); \quad u_R = Ri = E\times\exp\left(-\frac{\tau}{t}\right).$$

В первый момент *после замыкания ключа* (при t=0_+), ток в цепи $i(0_+) = E/R$, емкостной элемент в этот момент как бы замкнут. При *малом значении* R в цепи может наблюдаться значительный *скачок тока.*

В большинстве случаев ***процесс зарядки емкости можно считать закончившимся через интервал времени 3τ, который может быть*** достаточно большим (чем ***больше R и C, тем больше τ***). ***Это широко используется в реле времени*** – срабатывающих по истечении определенного времени.

Разрядка емкостного элемента через резистивный элемент.

После замыкания *емкостного элемента* на резистивный элемент R ключом К из положения 1 в положение 2 (рис. 1.44, а) в цепи емкости, предварительно заряженный от источника ЭДС до напряжения $u_C = E$, возникает ток:

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\frac{Cdu_C}{dt}. \tag{1.25}$$

Знак минус указывает, что *ток разрядки* i в контуре цепи (пунктиром) направлен навстречу напряжению на конденсаторе.

1. ***Однородное дифференциальное уравнение*** для этого контура (рис. 1.44, а) по второму закону Киргхофа с учетом соотношения (1.25):

$$u_R - u_C = Ri - u_C = -\frac{RCdu_C}{dt} - u_C = 0, \tag{1.26}$$

В цепи *разрядки емкостного элемента* нет источника ЭДС, поэтому дифференциальное уравнение (1.26) и его ***общее решение*** состоят только из свободной составляющей:

$$u_C = u_{C\,св} = A\cdot\exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \tag{1.27}$$

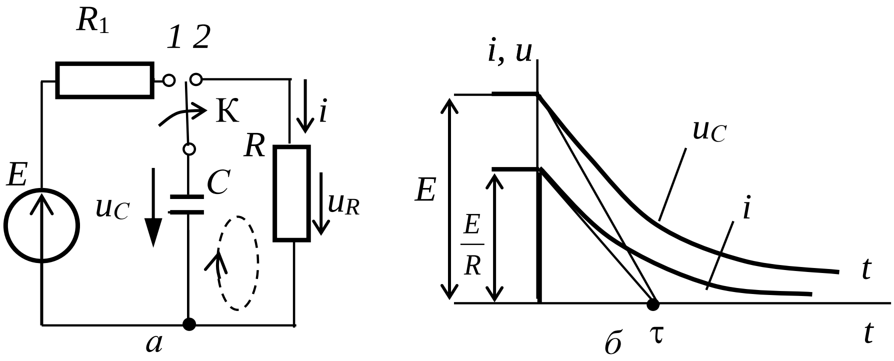


Рис. 1.44. Схема электрической цепи разрядки конденсатора (а), графики зависимости напряжения и тока при разрядке конденсатора (б)

Для определения постоянной A в (1.27) *используем начальные условия (2-й закон коммутации для емкостного элемента)*. Так как до коммутации ($t = 0_-$) емкостной элемент был заряжен до ЭДС источника, то:

при $t = 0$, $u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A$, откуда A=E.

2. ***Изменение напряжения при разрядке емкостного элемента*** (рис. 1.44, б) с учетом постоянной A:

$$\boldsymbol{u_C = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)},$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. **Разрядный ток** в соответствии с (1.25):

$$\boldsymbol{i = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

Таким образом, *ток скачком изменяется от нуля до значения* $i(0_+) = E/R$, *а затем убывает по экспоненциальному закону* (рис. 1.44, б).

Переходные процессы в цепи постоянного тока, с двумя накопителями (индуктивный (L), резистивный (R) и емкостной (C) элемента) энергии

Дифференциальное уравнение *неразветвленной цепи* (рис. 1.45) *после замыкания ключа* K с L, R и C элементами и источником постоянной ЭДС будет неоднородным.

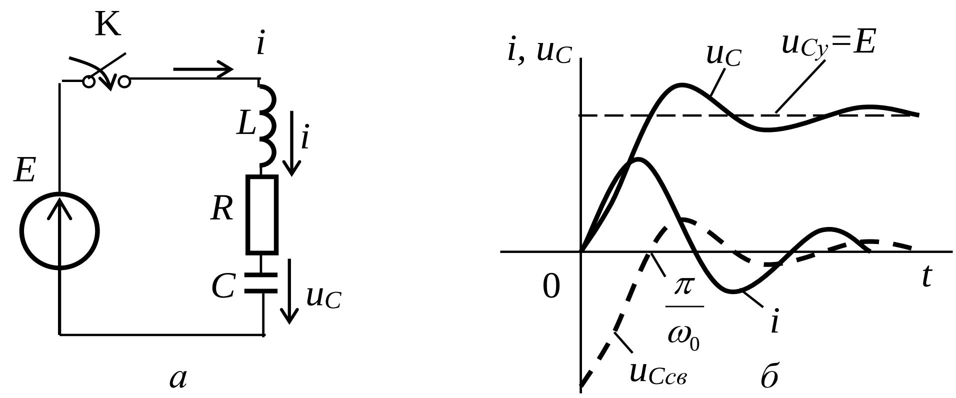


Рис. 1.45. Схема подключения *R*, *L*, *C* к источнику постоянной ЭДС (а), кривые изменения во времени напряжения и тока зарядки емкости (б)

Переходный процесс рассматриваем как наложение установившегося и свободного процессов.

Так, ***напряжение на емкостном элементе:***

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв}.$$

Составляющая *свободного процесса* $u_{Cсв} = A`_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t)$ [2], а составляющая *установившегося процесса* $u_{cy} = E$, т. е.

общее решение: $u_C = E + A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t)$. (1.28)

Зарядный ток: $i = C\dfrac{du_C}{dt} = p_1 C A_1 \exp(p_1 t) + p_2 C A_2 \exp(p_2 t).$ (1.29)

Принимаем, что до замыкания ключа **напряжения** *на емкостном элементе* и **тока в цепи не было**. Определение постоянных A_1 и A_2 осуществляется в соответствии с ***законами коммутации*** для момента включения ключа (*t = 0*):

$u_C(0\_) = 0 = u_C(0_+) = E + A_1 + A_2;$ откуда $i(0\_) = 0 = i(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2,$

$A_1 = p_2 E / (p_1 - p_2), \qquad A_2 = p_1 E / (p_1 - p_2).$

Ограничимся анализом ***колебательного процесса зарядки***. Выполнив соответствующие преобразования [2], ***получим зависимости изменения во времени напряжения и зарядного тока на емкостном элементе*** (рис.1.45):

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = E - \frac{E}{\omega_0\sqrt{LC}}\exp(-\delta t)\sin(\omega_0 t + \psi);$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\omega_0 L}\exp(-\delta t)\sin\omega_0 t; \quad \delta = R/2L; \quad \omega_0 = \sqrt{(LC)^{-2} - \delta^2};$$

$$\psi = arctg(\omega_0 / \delta); \quad (LC)^{-1/2} = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}\ .$$

Напряжение на емкости достигает *наибольшего значения* при ($t = \pi/\omega_0$). Оно тем больше, чем больше постоянная времени ($\tau = \frac{1}{\delta} = 2L/R$) больше периода собственных колебаний ($T_0 = 2\pi/\omega_0$)), и в пределе ***может превышать установившееся напряжение почти в 2 раза.*** Такое ***перенапряжение опасно для изоляции высоковольтных установок.*** Для ***исключения этого перенапряжения нужно*** осуществить ***апериодический режим зарядки***, для этого в ***цепь включают*** последовательно ***добавочный резистор R***.

Подключение последовательно к источнику синусоидальной ЭДС индуктивного и резистивного элементов

В цепи, состоящей из последовательно соединенных L и R элементов (катушки индуктивности) (рис.1.46) источника синусоидальной ЭДС $e = u = U_m \sin(\omega + \psi_0)$, *синусоидальный ток* при установившемся режиме*:*

$$i_y = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

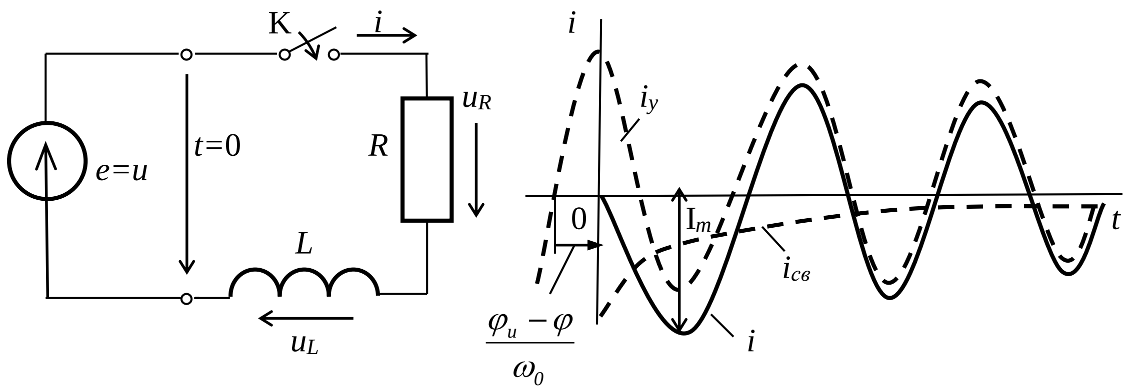


Рис. 1.46. Схема подключения *R*, *L* к источнику синусоидальной ЭДС (а), зависимость тока от времени (б)

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ – амплитуда тока; $j = arctg(\omega L / R)$–угол между током и напряжением; ψ_u – начальная фаза ЭДС источника.

1***. Дифференциальное уравнение цепи первого порядка:***

$$u_L + u_R = L\frac{di}{dt} + Ri = e.$$

Свободная составляющая тока $i_{св} = A\exp(pt)$ *а* ***общее решение для тока:***

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A\exp(-\frac{R}{L}t). \qquad (1.30)$$

В момент коммутации *(t=0)*, на ***основании*** **1**-***го закона коммутации для индуктивного элемента:***

при t=0, $i(0\_) = 0 = i(0_+) = I_m \sin(\psi_u - \varphi) + A$, откуда $A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi)$.

Общее решение (1.31), с учетом A:

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega\, t + \psi_u - j) - I_m \sin(\psi_u - j)\exp(-t / \tau),$$

где $\tau = L / R$ – постоянная времени цепи.

Таким образом, при переходном процессе (рис. 1.46) ток в цепи состоит из синусоидальной и свободной составляющих, убывающих экспоненциально.

Через время 3τ после замыкания ключа свободной составляющей можно пренебречь ($i_{св}$). Ток в цепи при переходном процессе может почти в 2 раза превысить амплитуду I_m.

Аналогично рассчитывается переходный процесс при подключении источника синусоидального напряжения к цепи с последовательно соединенными резистивным и емкостным элементами и в других случаях. И в этом случае максимальное напряжение на емкостном элементе может почти в 2 раза превысить амплитуду установившегося напряжения. Такое перенапряжение может привести к пробою изоляции в высоковольтных установках.